حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال برروی محور استوانه‌ای چرخان*

حمید محمدیون[۱]

چکیده در این مقاله جریان سکون شعاعیِ نانوسیال، برروی یک استوانهٔ نامحدود به‌صورت پایا مورد بررسی قرار گرفته است. جریان آزاد نیز پایا است و قدرت اولیهٔ جریان $\bar{k}$ می‌باشد و محور باسرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخش است. حل تشابهی معادلات ناویراستوکس و معادلهٔ انرژی در این تحقیق ارائه شده است. این معادلات، بااستفاده از تبدیلات مناسبی که در این تحقیق معرفی شده است ساده‌سازی شده‌اند. برای همهٔ اعداد رینولدز، با افزایش کسر حجمی، مؤلفه‌های شعاعی و محوری میدان سرعت و نیز مؤلفهٔ محوری تنش برشی کاهش می‌یابد و درمقابل، مؤلفه‌های زاویه‌ای میدان سرعت، مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی و عدد ناسلت جریان افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی نانوسیال، جریان سکون، انتقال حرارت، معادلات کاملاً تشابهی، کسر جرمی، سرعت زاویه‌ای ثابت.

Similarity Solution of Axisymmetric Stagnation Point Flow of Nanofluid on Rotating Cylinder

H. Mohammadiun

Abstract *In this paper the steady state radial stagnation point flow impinging on an infinite cylinder has been investigated. The impinging free stream is steady with a constant strain rate* $\bar{k}$ *and axis is rotating with constant angular velocity. Similarity solution of the Navier-Stokes and energy equations is presented in this research. A reduced from of these equations are obtained by using appropriate transformations introduced in this study. For all Reynolds numbers, as the particle fraction increases, fluid velocity component in radial and axial directions and axial component of shear-stresses decrease and in the contrary the angular component of shear stress and velocity field and Nusselt number increase.*

Key Words Nanofluid, Stagnation point flow, Heat transfer, Similarity solution, Particle fraction, Constant angular velocity

★تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۱/۱۱ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۱۱/۱۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.62224

(۱) استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، ایران. hmohammadiun@iau-shahrood.ac.ir

مقدمه

نانوسیال، نامی است که اولین بار توسط چویی [1]، به‌کار گرفته شد و به سیالاتی گفته می‌شود که حاوی نانوذرات جامد معلق با اندازهٔ کوچک‌تر از ۱۰۰ nm و با کسر حجمی کمتر از ۵ درصد باشند. نانوسیال می‌تواند باعث بهبود انتقال حرارت درمقایسه با مایعات خالص شود. از نانوسیالات می‌توان برای بهبود سیستم مدیریت حرارتی در کاربردهای مهندسی، ازجمله انتقال حرارت، میکرومکانیک، سیستم‌های HVAC و تجهیزات سرمایشی استفاده کرد. در سال‌های اخیر، محققان به مطالعهٔ تجربی و عددی انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیالات در هندسه‌های مختلف پرداخته‌اند (میگا و همکاران [2]، هریس و همکاران [3]، وانگ وایسز و همکاران [4]، سانترا و همکاران [5] و نوین و همکاران [6]).

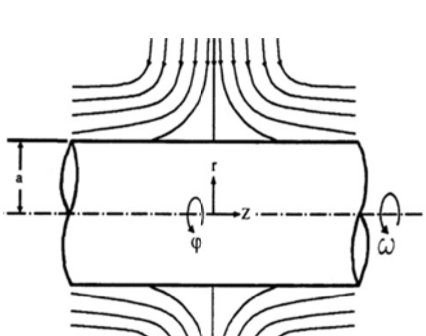
نیلد و کوزنتسو، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در لایهٔ مرزی جریان آرام یک نانوسیال را به‌صورت تحلیلی بررسی کردند [7]. آنها نشان داده‌اند که مدل به‌کاررفته برای نانوسیال با تأثیرات حرکت براونی تلفیق می‌شود. در پژوهش دیگری ، نیلدو کوزنتسو [8]، ناپایداری حرارتی در یک لایهٔ مرزی متخلخل اشباع‌شده با یک نانوسیال را بررسی کردند. اخیراً، خان و پاپ، جریان لایهٔ مرزی یک نانوسیال را که از روی یک سطح گسترش‌یافته عبور کرده است، مورد مطالعه قرار داده‌اند [9]. به‌طور کلی یافتن حل‌های دقیق معادلات ناویراستوکس دارای پیچیدگی‌های ریاضی بسیاری است. این امر ناشی از غیرخطی بودن این معادلات است، به‌طوری‌که اصل برهم‌نهی که در جریان پتانسیل کارساز است، دیگر قابل اعمال نیست؛ با این حال در مواردی خاص، می‌توان حل‌های دقیق برای معادلات ناویراستوکس یافت؛ ولی اغلب این حل‌ها مربوط به حالاتی است که جملات جابه‌جایی که جملاتی غیرخطی هستند، به‌طور طبیعی حذف شوند.

اولین حل دقیق مسئلهٔ جریان سکون توسط هایمنز [10] ارائه گردید. در این حل، جریان سکون دوبعدی در مقابل صفحهٔ تخت بررسی شد. هایمنز جریان روی صفحهٔ تخت ساکن را، به‌صورت آرام، غیر قابل تراکم و پایدار فرض کرد. وی همچنین با اختیار متغیری مناسب و نیز تبدیل مؤلفه‌های سرعت به یک تابع تشابهی، به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی دست یافت و با حل آن، میدان سرعت و درنتیجه میدان فشار را در نزدیکی صفحهٔ تخت به‌دست آورد.

پس از هایمنز، هومان [11] یک حل دقیق برای حالت سه‌بعدی معادلات ناویراستوکس از جریان سکون متقارن محوری درمقابل یک صفحهٔ تخت به‌دست آورد. او نیز با تعریف تغییر متغیری مناسب و تبدیل مؤلفه‌های سرعت به یک تابع تشابهی، یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای تابع تشابهی به‌دست آورد و حل آن را به‌صورت یک سری توانی ارائه داد. هوارث [12] و دیوی [13] جریان سکون سه‌بعدی درمقابل یک صفحهٔ تخت را برای حالت‌های غیر متقارن بررسی کردند و نتایج خود را منتشر نمودند. اولین حل دقیق برای جریان سکون متقارن محوری برروی یک استوانهٔ نامحدود، توسط وانگ [14] ارائه شد. در این حل فرض شده است که استوانه ساکن است و هیچ‌گونه حرکت چرخشی یا محوری ندارد، استوانه نیز بدون عبور جریان از سطح خود و فاقد دمش یا مکش سطحی می‌باشد. ضمناً به‌دلیل تقارن جریان آزاد نسبت به محور استوانه و دائمی بودن جریان، کلیهٔ مشتقات نسبت به φ (جهت زاویه‌ای) و t (زمان)، صفر است و معادلات ناویراستوکس در مختصات استوانه‌ای به‌شکل ساده‌تری تبدیل می‌شوند. گورلا [19-15] در مجموعه‌ای از مقالات، جریان سکون متقارن محوری اطراف استوانه را مورد بررسی قرار داد، که جریان به‌صورت آرام در حالت‌های دائم و

گذرا درنظر گرفته شده بود. در این مقالات اثر حرکت محوری یکنواخت و نیز حرکت محوری هارمونیک استوانه مورد بررسی قرار گرفته است. کانینگ و همکارانش [20]، اثر چرخش استوانه با سرعت دورانی ثابت را برای جریان سکون برروی استوانه مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق همچنین اثر مکش و دمش یکنواخت جریان، روی سطح استوانه درنظر گرفته شده است. به‌دلیل چرخش استوانه، جریان کاملاً سه‌بعدی است و سرعت درجهت φ نیز وجود دارد. تاخار و همکاران [21]، اثر غیردائمی بودن جریان سکون شعاعی متقارن محوری برروی استوانه را همراه با اثر حرکت محوری استوانه با سرعت متغیر مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مقاله، تابع تغییرات زمانی جریان سکون آزاد و همچنین تابع تغییرات زمانی سرعت محوری استوانه برای به‌دست آوردن حل کاملاً تشابهی، یکسان و به‌صورت عکس تابع خطی نسبت به زمان درنظر گرفته شده است. صالح و رحیمی [22] و رحیمی و صالح [24-23] حل‌های دقیقی برای جریان سکون متقارن محوری برروی استوانهٔ نامحدود و نیز انتقال حرارت آن، برای حالت‌هایی که استوانه دارای حرکت محوری و چرخشی تابع زمان می‌باشد به‌دست آورده‌اند. همچنین شکرگزار عباسی و همکاران [28-25] حل‌های دقیقی برای جریان سکون سه‌بعدی و انتقال حرارت سیال لزج تراکم‌ناپذیر در حالت گذار، در برخورد با صفحهٔ تخت ارائه داده‌اند. محمدیون و همکاران نیز [31-29] در مجموعه‌ای از مقالات، حل‌های کاملاً تشابهی به‌منظور تحلیل جریان سکون متقارن محوری و انتقال آن برروی محور استوانه‌ای با درنظر گرفتن اثرات تراکم‌پذیری جریان در حالت پایا ارائه داده‌اند. همچنین محمدیون و همکاران [32] به بررسی آزمایشگاهی بهبود انتقال حرارت در مبدل حرات دولوله‌ای در حضور نانوسیال اتیلن گلایکول– اکسید آلومینیوم پرداخته‌اند که در این تحقیق از آشفته‌ساز نوار مارپیچ در رژیم جریان مغشوش استفاده شده است. فریدون مهر و رحیمی [33] به حل مسئلهٔ تولید آنتروپی در جریان آرام نانوسیال هیدرومغناطیسی برروی صفحهٔ تخت پرداختند. در این تحقیق فرض شده است که سطح، تحت تأثیر مکش و دمش سطحی یکنواخت قرار دارد. منصور و همکاران [34] بااستفاده از روش حل تشابهی به بررسی تولید آنتروپی در لایهٔ مرزی جریان هیدرومغناطیسی سیال غیرنیوتنی برروی صفحهٔ تخت، بااستفاده از مدل کیسون پرداختند.

در تحقیق حاضر، حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال و انتقال حرارت آن برروی استوانه همراه با حرکت چرخشی یکنواخت، برای اولین‌بار ارائه شده است. همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود جریان در مختصات استوانه‌ای (r,φ,z) با اجزای سرعت متناظر (u,v,w) درنظر گرفته شده است. استوانه دارای طول نامحدود و شعاع a است و این استوانه دارای حرکت چرخشی با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌باشد. مسئله در شرایطی بررسی می‌شود که دمای دیوارهٔ استوانه ثابت است یا دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابتی قرار دارد.



شکل ۱ شماتیک جریان سکون شعاعی برروی استوانه همراه با حرکت چرخشی

از موارد زیر می‌توان به‌عنوان برخی از کاربردهای حالت‌های جریان سکون برروی استوانه نام برد: تحلیل حرکت ماشین‌های سانتریفیوژ، پروسه‌های تولید در کارخانجات صنایع شیمیایی، پتروشیمی و سیمان، فرایندهای سرمایش و گرمایش، فازهای شتاب‌گیری موتورهای راکت، مراحل راه‌اندازی و ازکاراندازی ماشین‌های صنعتی، مخلوط‌کننده‌های صنعتی، الک‌های صنعتی و سایر ماشین‌های نوسان‌کنندهٔ صنعتی.

خواص نانوسیال

نانوذرات اکسید آلومینیوم (γAl_2O_3) که در پژوهش حاضر به‌کار رفته‌اند ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد:
چگالی $\rho_m = 3600\dfrac{Kg}{m^3}$، قطر میانگین ذره *44 nm*
سایر خواص نیز در جدول (۱) فهرست شده است.

جدول ۱ خواص مربوط به سیال پایه و نانوسیال

پارامتر	مقدار
ضریب هدایت حرارتی سیال پایه، k_f	0.6316 [W/m-K]
ضریب هدایت حرارتی نانو ذره، k_p	40 [W/m-K]
ظرفیت گرمایی ویژه سیال پایه، $C_{p,f}$	4.181 [kJ/kg-K]
ظرفیت گرمایی ویژه نانوذرات، $C_{p,p}$	0.765 [kJ/kg-K]
چگالی سیال پایه، ρ_f	987.6 [kg/m^3]
چگالی نانو ذرات، ρ_p	3600 [kg/m^3]
لزجت دینامیکی سیال پایه، μ_f	0.000538 [kg/m-s]
قطر نانوذرات، d_p	44 nm
قطر مولکول سیال پایه، d_f	0.384 nm

چگالی نانوسیال

در این تحقیق فرض شده است که چگالی نانوذرات اکسید آلومینیوم در کل دامنهٔ دمایی مورد نظر ثابت باشد و از رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ چگالی نانوسیال استفاده شده است:

$$\rho_n = (1-\phi_v)\rho_f + \phi_v\rho_p \qquad (۱)$$

در رابطهٔ بالا اندیس‌های p , f , n به‌ترتیب معرف نانوسیال، سیال پایه و ذرات اکسید آلومینیوم می‌باشد و ϕ_v معرف کسر حجمی ذرات معلق در سیال است.

لزجت دینامیکی نانوسیال

لزجت دینامیکی نانوسیال را می‌توان با روابط موجود، برای مخلوط‌های دوفازی برآورد کرد. یکی از جامع‌ترین روابط برای محاسبهٔ لزجت سینماتیکی نانوسیالات رابطه‌ای است که توسط میسون کرچیونه به‌صورت زیر ارائه شده است [35]:

$$\frac{\mu_n}{\mu} = \frac{1}{1-34.87(\frac{d_p}{d_f})^{-0.3}\phi_v^{1.03}} \qquad (۲)$$

در رابطهٔ بالا d_f، قطر معادل یک مولکول سیال پایه است، که بااستفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d_f = 0.1(\frac{6M}{N\pi\rho_{f0}})^{\frac{1}{3}} \qquad (۳)$$

که در آن M وزن مولکولی سیال پایه، N عدد آووگادرو و ρ_{f0} چگالی سیال پایهٔ محاسبه‌شده در دمای $T_0 = 293k$ است. در تحقیق حاضر، فرمول کرچیونه برای محاسبهٔ لزجت سیال و بازنویسی معادلات ناویر–استوکس حاکم بر نانوسیال و نیز معادلهٔ انرژی استفاده شده است.

ضریب هدایت حرارتی نانوسیال

رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ ضریب هدایت حرارتی نانوسیال پیشنهاد شده است [35]:

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = 1 + 4.4\,\mathrm{Re}_p^{\,0.4}\,\mathrm{Pr}_{bf}^{\,0.66}(\frac{T}{T_{fr}})^{10}(\frac{k_p}{k_f})^{0.03}\phi_v^{\,0.66} \qquad (٤)$$

در رابطهٔ بالا Re_p و Pr_{bf} به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\mathrm{Re}_p = \frac{2\rho_{bf} k_b T}{\pi \mu_{bf}{}^2 d_p} \ \& \ \mathrm{Pr}_{bf} = \frac{\mu_{bf}(c_p)_{bf}}{k_{bf}} \tag{5}$$

معادلات حاکم

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است جریان در مختصات استوانه‌ای (r,φ,z) با اجزای سرعت متناظر (u,v,w) درنظر گرفته شده است. جریان تراکم‌ناپذیر است و در حالت پایا بررسی می‌شود. با فرض تقارن محوری معادلات حاکم در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد:

معادلهٔ پیوستگی:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + r\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

معادلهٔ اندازه حرکت راستای r:

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P}{\partial r} + \upsilon_n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{7}$$

معادلهٔ اندازه حرکت راستای z:

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P}{\partial z} + \upsilon_n\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{8}$$

معادلهٔ اندازه حرکت راستای φ:

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \upsilon_n\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \tag{9}$$

معادلهٔ انرژی:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_{eff}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{eff}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = (\rho c_p)_n\left[u\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right] \tag{10}$$

شرایط مرزی معادلات بالا عبارتند از:

$$r = a: \quad u = 0, \quad v = a\omega, \quad w = 0 \tag{11}$$

$$r \to \infty: \ u = -\bar{k}\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \ \& \ \frac{\partial u}{\partial r} = -\bar{k}, \quad \lim_{r\to\infty}(rv) = 0, \quad w = 2\bar{k}z \tag{12}$$

رابطهٔ (۱۱) همان شرط عدم لغزش سیال لزج می‌باشد. روابط (۱۲) براساس حل غیرلزج به‌دست آمده‌اند، به این شکل که اولی بیانگر این موضوع است که شیب تغییرات سرعت u در دوردست با شیب آن در حل غیرلزج یکسان است و عبارت سوم نیز بیانگر این موضوع است که اگر به‌حد کافی از دیوارهٔ استوانه دور شویم، آن‌گاه سرعت w سیال لزج همان سرعت w سیال غیرلزج می‌شود.

شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادلهٔ انرژی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

الف) حالت دیواره با دمای معلوم

$$r = a: \quad T = T_w \qquad r \to \infty: \ T = T_\infty \tag{13}$$

در رابطهٔ فوق T_w بیانگر دمای دیواره می‌باشد که دارای مقدار ثابت است. همچنین T_∞ بیانگر دمای جریان آزاد یا همان دمای سیال دور از دیواره می‌باشد.

ب) حالت دیواره با شار حرارتی معلوم

$$r = a: \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_w}{k} \qquad r \to \infty: \quad T = T_\infty \tag{۱٤}$$

در روابط فوق k ضریب هدایت حرارتی سیال و q_w شار حرارتی معلوم دیوارهٔ استوانه می‌باشد که مقدار آن ثابت است. همان‌طور که از روابط فوق مشهود است، شرط مرزی دوم در هر دو حالت یکسان است و فرض شده است که T_∞ ثابت باشد. بااستفاده از متغیرهای تشابهی مناسب می‌توان تعداد متغیرهای موجود در معادلات حاکم را کاهش داد. با الگو برداری از حل‌های غیرلزج ارائه‌شده در رابطهٔ (۱۲) و با ضرب این روابط در توابع تبدیل مناسب و فرض جریان پایا، روابط زیر برای کاستن معادلات ناویراستوکس به معادلات تشابهی بی‌بعد ارائه شده است [23]:

$$u = -\bar{k}\frac{a}{\sqrt{\eta+1}} f(\eta), \; v = \bar{k}\frac{a}{\sqrt{\eta+1}} G(\eta), \quad w = 2\bar{k}\, f'(\eta)\, z, \quad P = \rho_n \bar{k}^2 a^2 p \tag{۱۵}$$

که در روابط بالا $'(\;)$ معرف مشتق نسبت به متغیر تشابهی η می‌باشد که به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\eta = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1 \tag{۱٦}$$

روابط (۱۵)، معادلهٔ پیوستگی را خودبه‌خود ارضا می‌کند و پس از جایگزینی این روابط در معادلات اندازه حرکت راستاهای z ،φ و r، یک دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای تعیین f و G به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(\eta+1) f''' + f'' + \mathrm{Re}_n [1 - (f')^2 + f\, f''] = 0 \qquad (\eta+1) G'' + \mathrm{Re}_n\, f\, G' = 0 \tag{۱۷}$$

در رابطهٔ بالا عدد رینولدز نانوسیال به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\mathrm{Re}_n = \beta \frac{\bar{k}\, a^2}{2\upsilon_f} \tag{۱۸}$$

$$\beta = [1 - 34.87(\frac{d_p}{d_f})^{-0.3} \phi_v^{\;1.03}](1 - \phi_v + \phi_v \frac{\rho_p}{\rho_f}) \tag{۱۹}$$

بااستفاده از روابط (۱۱ و ۱۲)، شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادلات (۱۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\eta = 0: \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad G = \frac{a^2}{2\upsilon}\frac{\omega}{\mathrm{Re}} \qquad \eta \to \infty: \quad f' = 1, \quad G = 0 \tag{۲۰}$$

به‌منظور انتقال معادلهٔ انرژی از متغیر بی‌بعد $\theta(\eta)$ در دو حالت دیواره با دمای ثابت و شار حرارتی ثابت به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

الف) حالت دیواره با دمای معلوم

در این حالت متغیر جدید θ که بیانگر دمای بی‌بعد است، به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{T_w - T_\infty} \tag{۲۱}$$

دراین حالت، شرایط مرزی ارائه‌شده در رابطهٔ (۱۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\eta = 0: \quad \theta = 1 \qquad \eta \to \infty: \quad \theta = 0 \tag{۲۲}$$

با فرض $\Gamma = 4.4(\frac{2\rho_{bf}K_b}{\pi\mu_{bf}^{2}d_p})^{0.4}\frac{1}{T_{fr}^{10}}(\frac{k_p}{k_f})^{0.03}$، معادلهٔ انرژی پس از ساده‌سازی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left\{1+\Gamma\phi_v^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}^{0.66}[T_\infty+(T_w-T_\infty)\theta]^{10.4}\right\}\\&[(\eta+1)\theta''+\theta']+10.4[T_\infty+(T_w-T_\infty)\theta]^{9.4}\\&(T_w-T_\infty)\Gamma\phi_v^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}^{0.66}(\eta+1)(\theta')^2\\&+\left\{1-\phi_v+\phi_v[\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}]\right\}\mathrm{Re}_{bf}\,\mathrm{Pr}_{bf}\,f\theta'=0\end{aligned} \tag{۲۳}$$

ب) حالت دیواره با شار حرارتی معلوم

در شرایطی که دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابت q_w قرار دارد دمای بی بعد $\theta(\eta)$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\theta(\eta)=\frac{T(\eta)-T_\infty}{\frac{aq_w}{2k_{bf}}} \tag{۲٤}$$

در این حالت، شرایط مرزی ارائه‌شده در رابطهٔ (۱۳) به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\eta=0: \quad -\frac{k_{nf}}{k_{bf}}\theta'(0)=1\\&\eta\to\infty: \quad \theta=0\end{aligned} \tag{۲٥}$$

بااستفاده از رابطهٔ (۲٤) و پس از ساده‌سازی، معادلهٔ انرژی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left\{1+\Gamma\phi_v^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}^{0.66}[T_\infty+\frac{aq_w}{2k_{bf}}\theta]^{10.4}\right\}\\&[(\eta+1)\theta''+\theta']+10.4[T_\infty+\frac{aq_w}{2k_{bf}}\theta]^{9.4}\\&\frac{aq_w}{2k_{bf}}\Gamma\phi_v^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}^{0.66}(\eta+1)(\theta')^2+\\&\left\{1-\phi_v+\phi_v[\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}]\right\}\mathrm{Re}_{bf}\,\mathrm{Pr}_{bf}\,f\theta'=0\end{aligned} \tag{۲٦}$$

ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}h&=\frac{-k_{nf}\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=a}}{T_w-T_\infty}=\frac{-k_{nf}\left.\frac{\partial T}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}\right|_{\eta=0}}{T_w-T_\infty}\\&=\frac{-k_{nf}\big|_{T=Tw}(T_w-T_\infty)\theta'(0)}{T_w-T_\infty}\frac{2}{a}\end{aligned} \tag{۲۷}$$

از رابطهٔ بالا نتیجهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&ha=-2k_{nf}\big|_{T=Tw}\theta'(0)=-2k_{bf}[1+4.4\,\mathrm{Re}_p^{0.4}\\&\mathrm{Pr}_{bf}^{0.66}(\frac{T_w}{T_{fr}})^{10}(\frac{k_p}{k_f})^{0.03}\phi^{0.66}]\theta'(0)\end{aligned} \tag{۲۸}$$

معادلات دیفرانسیل (۱۷ و ۲۳ و ۲٦) به‌همراه شرایط مرزی ارائه‌شده، باروش تفاضل محدود و بااستفاده از الگوریتم ماتریس سه‌قطری (*TDMA*) به‌طور هم‌زمان حل می‌شود. نتایج حاصل از حل این معادلات در بخش‌های بعد ارائه شده است.

محاسبهٔ تنش برشی در سطح

برای محاسبهٔ تنش برشی مؤثر بر سطح استوانه رابطهٔ زیر مورد استفاده قرار گرفته است:

$$\sigma=\sigma_\varphi\hat{e}_\varphi+\sigma_z\hat{e}_z=\mu_n[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v}{r})\hat{e}_\varphi+\frac{\partial w}{\partial r}\hat{e}_z]_{r=a} \tag{۲۹}$$

به‌منظور محاسبهٔ تنش برشی، ابتدا با مشتق‌گیری زنجیره‌ای، جملهٔ $\frac{\partial w}{\partial r}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}=(2\bar{k}\,f''z)\frac{2r}{a^2} \tag{۳۰}$$

باتوجه به این‌که در *r=a*، *داریم* $\eta=0$ رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ تنش برشی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\sigma=\mu_n[2\bar{k}f''(0)z]\frac{2}{a}\Rightarrow\frac{\sigma a}{4\mu_n\bar{k}z}=f''(0) \tag{۳۱}$$

همچنین برای محاسبهٔ σ_φ داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)= -\frac{2\bar{k}a^2}{r^2}\frac{G(\eta)}{c(\eta)}+2\bar{k}\left[G'(\eta)-\frac{G(\eta)c'(\eta)}{c(\eta)}\right] \qquad (۳۲)$$

ازآنجاکه در سطح استوانه $\eta = 0$ می‌باشد، σ_φ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_\varphi = 2\bar{k}\mu_n\left[-\frac{G(0)}{c(0)}+G'(0)-\frac{G(0)c'(0)}{c(0)}\right] \rightarrow \quad \frac{\sigma_\varphi}{2\bar{k}\mu_n} = -\frac{G(0)}{c(0)}+G'(0)-\frac{G(0)c'(0)}{c(0)} \qquad (۳۳)$$

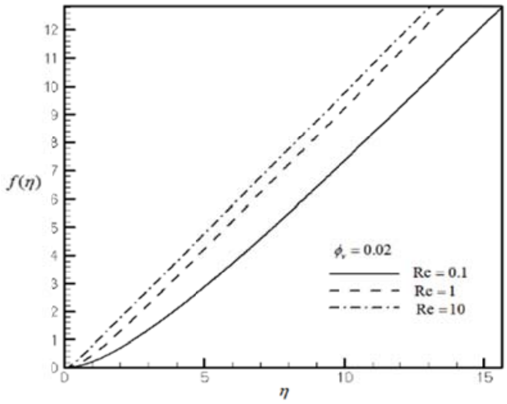
باتوجه به این‌که $\frac{G(0)}{c(0)}=\frac{a^2}{2\upsilon}\frac{\omega}{\mathrm{Re}}$، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\sigma_\varphi}{2\mu_n\,\omega} = -[1+c'(0)]+\frac{\bar{k}\,G'(0)}{\omega} \qquad (۳٤)$$

نتایج

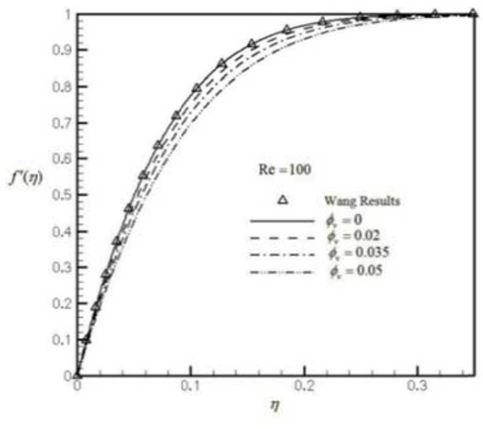
در این قسمت نتایج حاصل از حل معادلات دیفرانسیل (۱۷ و ۲۳ و ۲٦) به‌همراه تنش برشی در سطح و عدد ناسلت در محدودهٔ اعداد رینولدز مختلف و به‌ازای کسر حجمی‌های انتخابی ارائه شده است.

در شکل (۲) نمونه‌ای از منحنی‌های $f(\eta)$ برحسب η برای کسر حجمی $\phi_v = 0.02$ و اعداد رینولدز انتخابی ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز عمق نفوذ مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت سیال افزایش می‌یابد؛ زیرا با افزایش عدد رینولدز اینرسی حرکتی شعاعی سیال بیشتر می‌شود، به‌عبارت دیگر با نفوذ هر چه بیشتر ممنتوم شعاعیِ سیال، مؤلفهٔ شعاعی میدان جریان نیز افزایش می‌یابد.



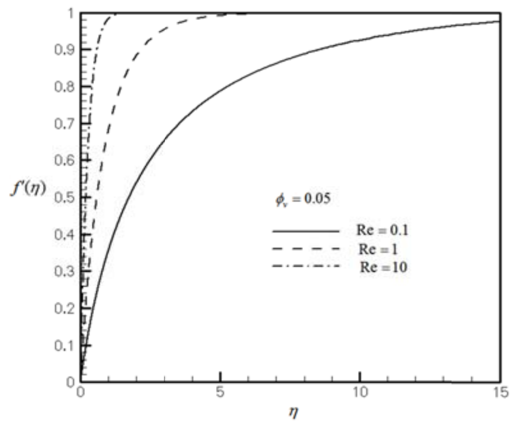
شکل ۲ منحنی تغییرات $f(\eta)$ برحسب η در $\phi_v = 0.02$ به‌ازای اعداد رینولدز مختلف

اثر تغییر کسر حجمی نانوذرات بر تابع $f'(\eta)$ در $\mathrm{Re} = 100$ در شکل (۳) نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتایج حل حاضر در $\phi_v = 0$ (برای سیال پایه) بر نتایج حل *Wang* مرجع [14] منطبق می‌باشد. با افزایش کسر حجمی نانوذرات، عمق نفوذ مؤلفهٔ محوری میدان سرعت سیال کاهش می‌یابد. به‌عبارت دیگر تزریق نانوذرات در سیال پایه، باعث کاهش اینرسی حرکتی سیال می‌شود و با کاهش اندازهٔ حرکت محوری سیال، سرعت محوری آن کاهش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهند، بیشترین مؤلفهٔ محوری، مربوط به سیال پایه می‌باشد.

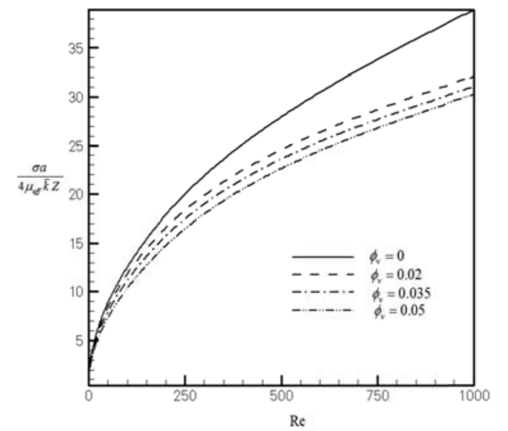


شکل ۳ منحنی تغییرات $f'(\eta)$ برحسب η در $\mathrm{Re} = 100$

در شکل (٤) نمونه‌ای از منحنی های $f'(\eta)$ برحسب η برای $\phi_v = 0.05$ و اعداد رینولدز انتخابی نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش عدد رینولدز، ضخامت لایهٔ مرزی سرعت کاهش می‌یابد که منجر به افزایشِ شیب نیم‌رخ‌های توزیع سرعت در $\eta = 0$ می‌شود و بنابراین گرادیان سرعت در سطح استوانه افزایش می‌یابد. می‌توان نشان داد برای سایر مقادیر کسر حجمی نانوذرات نیز نتایج مشابهی استخراج می‌شود.



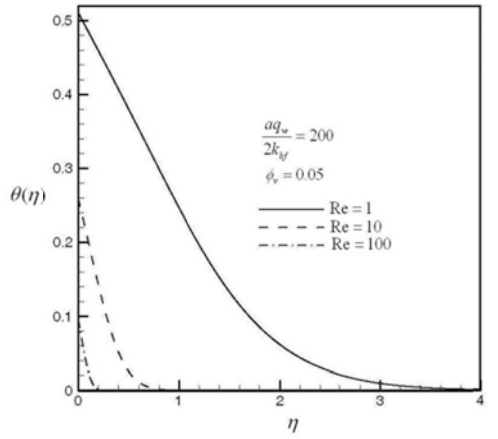
شکل ٤ منحنی تغییرات $f'(\eta)$ برحسب η در $\phi_v = 0.05$، به‌ازای اعداد رینولدز مختلف



شکل ٥ منحنی تغییرات تنش برشی در سطح استوانه برحسب عدد رینولدز، به‌ازای کسر حجمی‌های مختلف نانوذرات

در شکل (٥) مؤلفهٔ محوری تنش برشی دیواره، برحسب عدد رینولدز در کسرحجمی‌های مختلف نانوذرات ترسیم شده‌اند. باتوجه به منحنی‌های ارائه‌شده، می‌توان نتیجه گرفت که افزایش کسرحجمی نانوذرات، تنش برشی در سطح را کاهش می‌دهد، زیرا افزایش کسرحجمی نانوذرات باعث کاهش شیب نیم‌رخ‌های توزیع سرعت می‌شود و به‌عبارت دیگر گرادیان سرعت در سطح کاهش می‌یابد و این موضوع باعث کاهش تنش برشی در سطح استوانه می‌شود.

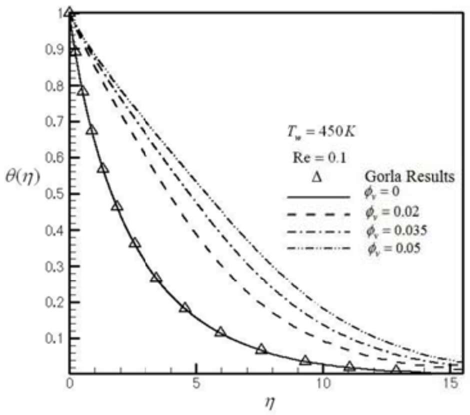
در شکل (٦) نمونه‌ای از منحنی‌های توزیع دمای بی‌بعد θ برحسب η نمایش داده شده است. این منحنی‌ها در شرایطی ترسیم شده‌اند که دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی یکنواخت قرار دارد. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش عدد رینولدز جریان اندازهٔ حرکت سیال افزایش می‌یابد و با افزایش عمق نفوذ ممنتوم سیال نه‌تنها ضخامت لایهٔ مرزی حرارتی کاهش می‌یابد بلکه دمای بی‌بعد در سطح نیز کمتر می‌شود.



شکل ٦ اثر کسر حجمی نانوذرات بر منحنی‌های دمای بی‌بعد θ در شرایط شار حرارتی ثابت دیواره در Re=10

در شکل (٧) تأثیر کسر حجمی ϕ_v بر منحنی‌های دمای بی‌بعد نشان داده شده است. این نتایج در دمای دیواره T_w=450k ترسیم شده‌اند. همان‌طور که انتظار می‌رود، برخلاف منحنی‌های دمای بی‌بعد شار ثابت در این حالت تمام منحنی‌ها از نقطهٔ $\theta = 1$ شروع می‌شوند و با افزایش کسر حجمی نانوذرات شیب منحنی‌ها کاهش می‌یابد واین به‌معنی افزایش ضخامت

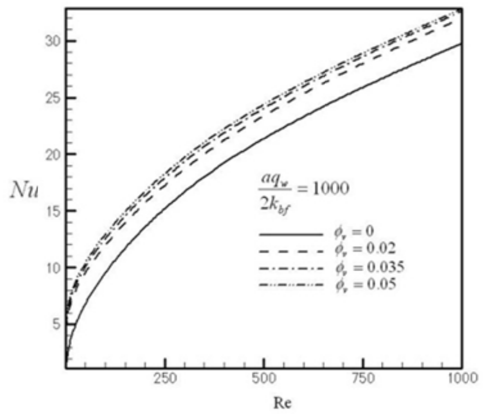
لایهٔ مرزی حرارتی می‌باشد. هر چند افزایش نانوذرات به سیال، منجر به کاهش گرادیان دمای بی‌بعد در سطح استوانه می‌شود، اما شدت افزایش ضریب هدایت حرارتی آن‌قدر قابل‌توجه است که افزایش نرخ انتقال حرارت را به‌همراه دارد.



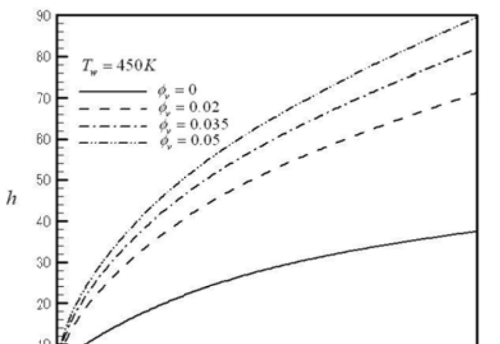
شکل ۷ تأثیر کسر حجمی ϕ_v بر منحنی‌های دمای بی‌بعد در دمای T_W=450K و Re= 0.1

تأثیر کسر حجمی نانوذرات برروی عدد ناسلت در شرایطی که دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابت قرار دارد در منحنی‌های شکل(۸) نمایش داده شده است. در این منحنی‌ها عدد ناسلت برحسب عدد رینولدز به‌ازای کسر حجمی‌های مختلف ترسیم شده است. نتیجهٔ قابل‌توجه این است که با افزایش کسر حجمی نانوذرات عمق نفوذ حرارت افزایش می‌یابد و ضخامت لایهٔ مرزی حرارتی بیشتر می‌شود. همان‌طور که این منحنی‌ها نشان می‌دهند افزایش عدد رینولدز جریان باعث افزایش عدد ناسلت می‌شود که این به‌معنی بهبود انتقال حرارت است. همچنین افزایش کسر حجمی نانوذرات تأثیر محسوسی بر افزایش عدد ناسلت جریان دارد و بهبود انتقال حرارت را به‌همراه می‌آورد.

در شکل (۹) ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) برحسب عدد رینولدز در دمای دیواره T_w=450 k به‌ازای کسر حجمی‌های متفاوت ترسیم شده است. با افزایش کسر حجمی‌های نانوذرات که منجر به افزایش ضریب هدایت حرارتی سیال می‌شود ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، افزایش می‌یابد و همان‌طور که ملاحظه می‌شود کمترین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی مربوط به سیال پایه ($\phi_v = 0$) می‌باشد.



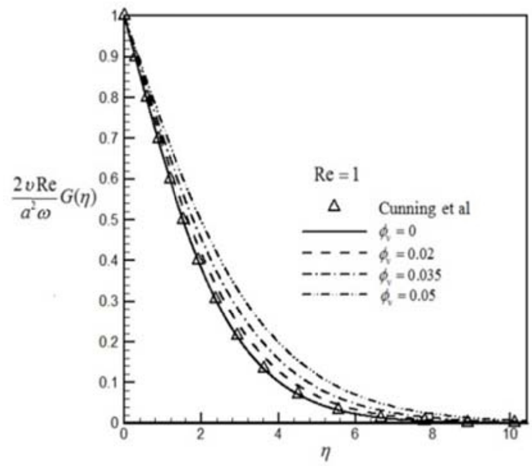
شکل ۸ تأثیر کسر حجمی نانوذرات برروی عدد ناسلت در شرایط $\frac{aq_w}{2k_{bf}}=1000$



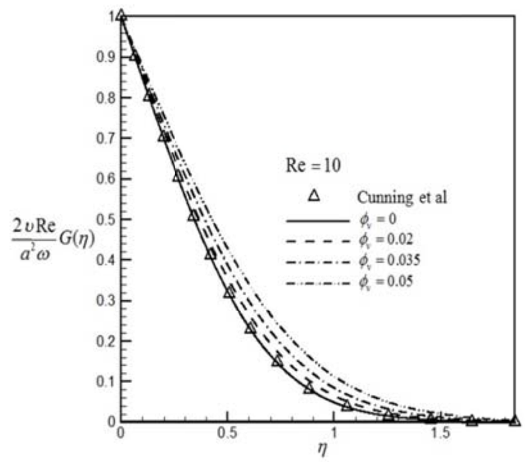
شکل ۹ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) دردمای دیواره T_w=450 k

اثر کسر حجمی نانوذرات بر تابع $\frac{2\upsilon \mathrm{Re}}{a^2\omega}G(\eta)$ برحسب η به‌ازای اعداد رینولدز مختلف در شکل‌های (۱۲–۱۰) نمایش داده شده است. با افزایش کسر حجمی نانوذرات، به‌ازای هر مقدار عدد رینولدز

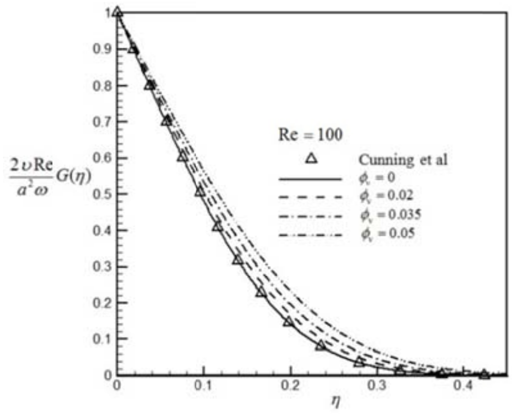
انتخابی، مقدار تـابع $\frac{2\upsilon \mathrm{Re}}{a^2\omega}G(\eta)$ افـزایش مـی‌یابـد و افزایش مقدار این تابع به‌معنی افزایش مؤلفـهٔ زاویــه‌ای میدان سرعت سیال است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در تمام اعداد رینولدز، کمترین مؤلفـهٔ زاویــه‌ای میـدان سرعت سیال متعلق به سیال پایه است. در تمـام مـوارد نتایج حاصل، به‌ازای $\phi_v = 0$ (برای سیال پایه) بر نتایج Cunning مرجع [19] منطبق است که این انطباق نتایج، صحت روش حل را تأیید می‌کند.



شکل ۱۰ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت در Re=1

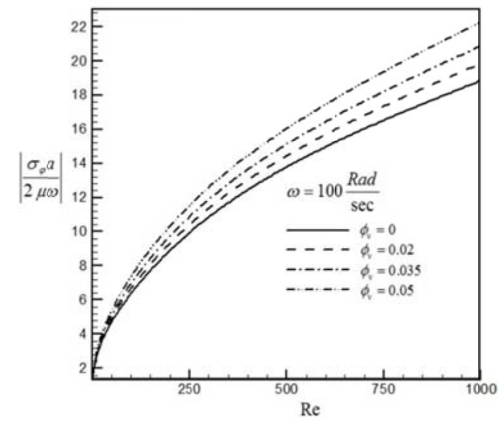


شکل ۱۱ تاثیر کسر حجمی نانوذرات برمولفه زاویه ای میدان سرعت در Re=۱۰



شکل ۱۲ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت در Re=۱۰۰

شکل (۱۳) بـه‌منظـور بررسـی اثـر کسـر حجمـی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی سیال در سـطح استوانه ترسیم شده است. نتایج بـه‌ازای $\omega = 100\frac{rad}{\sec}$ ارائه شده است و نتیجهٔ جالب‌توجه ایـن اسـت کـه بـا افزایش کسرحجمی نـانوذرات، مؤلفـهٔ زاویــه‌ای تـنش برشی در سطح استوانه افزایش می‌یابد و کمترین مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی مربوط به سیال پایه می‌باشد.



شکل ۱۳ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی

نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر حل تشـابهی جریـان سـکون متقـارن محـوری نانوسـیال بـرروی اسـتوانهٔ چرخـان و انتقـال

حرارت آن، در شرایطی که استوانه با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد، ارائه شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بااستفاده از متغیر تشابهی و توابع تبدیل مناسبی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و حل شده‌اند. همهٔ این نتایج در محدودهٔ اعداد رینولدز ۰/۱ تا ۱۰۰۰ و به‌ازای مقادیر مختلف کسر حجمی نانوذرات $(\phi_v = 0.02, 0.035, 0.05)$ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد افزایش کسر حجمی نانوذرات، باعث کاهش مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت و مؤلفهٔ محوری تنش برشی مؤثر بر دیوارهٔ استوانه می‌شود درحالی‌که ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، عدد ناسلت، مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت و مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی در سطح استوانه افزایش می‌یابد.

فهرست علائم

ρ_n	چگالی نانوسیال
ϕ_v	کسر حجمی
ρ_f	چگالی سیال پایه
ρ_p	چگالی نانوذرات
d_f	قطر معادل مولکول‌های سیال پایه
d_p	قطر معادل مولکول‌های نانوذرات
μ_n	لزجت دینامیکی نانوسیال
μ	لزجت دینامیکی سیال پایه
η	متغیر تشابهی
Re_n	عدد رینولدز نانوسیال
Re	عدد رینولدز سیال پایه
$\bar{k}$	قدرت چشمه جریان
a	شعاع استوانه
r, φ, z	مؤلفه‌های مختصات استوانه‌ای
υ_f	لزجت سینماتیکی سیال پایه
u	مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت
w	مؤلفهٔ محوری میدان سرعت
v	مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت
σ	تنش برشی
p	فشار
P	فشار بی‌بعد
f	تابع بی‌بعد مرتبط با مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت
G	تابع بی‌بعد مرتبط با مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت
υ_n	لزجت سینماتیکی نانوسیال
k_{eff}	ضریب هدایت حرارتی نانوسیال
T_{fr}	دمای انجماد سیال پایه
Re_P	عدد رینولدز نانوذرات
Pr_b	عدد پرانتل سیال پایه
Nu	عدد ناسلت
h	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی

مراجع

1. Choi, S.U.S, "Enhancing thermal conductivity of fluid with nanoparticles", *Dev. Appl Non-Newtonian Flows*, Vol. 66, pp. 99–105, (1995).
2. Maiga, S.E.B., Nguyen, C.T., Galanis, N. and Roy, G., "Heat transfer behaviors of nanofluid in a uniformly heated tube", *Superlattices Microstruct*., Vol. 35, No. 3-6, pp. 453–462, (2004).
3. Heris, S.Z., Etemad, S.Gh. and Esfahani, M.N., "Experimental investigation of oxide nanofluid laminar forced flow convective heat transfer", *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, Vol. 33, No. 4, pp. 529–535, (2006).

4. Duangthongsuk, W. and Wongwises, S., "Heat transfer enhancement and pressure drop characteristics of TiO2-water nanofluid in a double-tube counter flow heat exchangers", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 52, No. 7-8, pp. 2059–2067, (2009).
5. Santra, A.K., Sen, S. and Chkroborty, M., "Study of heat transfer due to laminar flow of copper–water nanofluid through two isothermally heated parallel plates", *Int. J. Therm. Sci.,* Vol. 48, No. 1, pp. 391–400, (2009).
6. Nguyen, C.T., Galanis, N., Polidori, G., Fohanno, S., Pota, C.V. and Beche, A.L., "An experimental study of confined and submerged impinging jet heat transfer using Al2O3-water nanofluid", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, No. 2, pp. 401–411, (2009).
7. Kuznetsov, A.V. and Nield, D,A., "Natural convection boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate*", Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 49, No. 2, pp. 243–247 (2010).
8. Kuznetsov, A.V. and Nield, D.A., "Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid: Brinkman model", *Transp. Porous Med.*, Vol. 81, No. 3, pp. 409–422, (2010).
9. Khan, W.A. and Pop, I., "Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 53, No. 11-12, pp. 2477–2483, (2010).
10. Hiemenz, K., "Die Grenzchicht an einem in den gleichformingen Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden", *Kreiszylinder. Dinglers Polytech. J.*, Vol. 326, pp. 321-410, (1911).
11. Homann, F.Z., "Der Einfluss grosser Zahighkeit bei der Strmung um den Zylinder und um die Kugel", *Zeitsch. Angew. Math. Mech.*, 16153-164, (1936)
12. Howarth, L., "The boundary layer in three dimensional flow. Part II. The flow near a stagnation point", *Phil. Mag.*, Vol. 42, No. 7, pp. 1433-1440, (1951).
13. Davey, A., "Boundary layer flow at a saddle point of attachment", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 10, No. 4, pp. 593-610, (1951).
14. Wang, C., "Axisymmetric stagnation flow on a cylinder", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 2, pp. 207-213, (1974).
15. Gorla, R.S.R., "Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder", *Dev. Mec*, Vol. 9, pp.286-288, (1977).
16. Gorla, R.S.R., "Nonsimilar axisymmetric stagnation flow on a moving cylinder", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 16, No. 6, pp. 397-400, (1978).
17. Gorla, R.S.R., "Transient response behaviour of an axisymmetric stagnation flow on a circular cylinder due to time dependent free stream velocity", *Int. J. Engineering science*, Vol. 16, No. 7, pp. 493- 502, (1978).
18. Gorla, R.S.R., "Unsteady viscous flow in the vicinity of an axisymmetric stagnation-point on a cylinder", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 17, No. 1, pp. 87-93, (1979).
19. Gorla, R.S.R., "Heat transfer in axisymmetric stagnation flow on a cylinder", *Applied Scientific Research J.*, Vol. 32, No. 5, pp. 541-553, (1976).
20. Cunning, G.M., Davis, A.M.J. and Weidman, P.D., "Radial stagnation flow on a rotating cylinder with uniform transpiration", *Journal of Engineering mathematics*, Vol. 33, No. 2, pp. 113-128, (1998).
21. Takhar, H.S., Chamkha, A.J. and Nath, G., "Unsteady axisymmetric stagnation-point flow of a viscous fluid on a cylinder", *Int. Journal of Engineering Science*, Vol. 37, No. 15, pp. 1943-1957, (1999).
22. Saleh, R. and Rahimi, A.B., "Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous Fluid on a Moving Cylinder with Time- Dependent Axial Velocity and Uniform Transpiration", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, No. 6, pp. 997–1005, (2004).
23. Rahimi, A.B. and Saleh, R., "Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous

Fluid on a Rotating Cylinder With Time- Dependent Angular Velocity and Uniform Transpiration", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, No. 1, pp. 107–115 (2007).

24. Rahimi, A.B. and Saleh, R., "Similarity Solution of Unaxisymmetric Heat Transfer in Stagnation-Point Flow on a Cylinder with Simultaneous Axial and Rotational Movements", Journal of Heat Transfer, Vol. 130, No. 5, pp. 054502-1–054502-5, (2008).
25. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Non-Axisymmetric Three- Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 131, No. 7, pp. 074501.1–074501.5, (2009).
26. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Three-Dimensional Stagnation- Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate with Transpiration", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 23, No. 3, pp. 513–521, (2009).
27. Abbasi, A.S., Rahimi, A.B. and Niazmand, H., "Exact Solution of Three-Dimensional Unsteady Stagnation Flow on a Heated Plate", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 25, No. 1, pp. 55–58, (2011).
28. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Investigation of Two-Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer Impinging on a Flat Plate", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 134, No. 6, pp. 064501-06450, (2012).
29. Mohammadiun, H. and Rahimi, A.B., "Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous, Compressible Fluid on a Cylinder", *Journal of Thermo physics and Heat Transfer*, Vol. 26, No. 3, pp. 494-502, (2012).
30. Mohammadiun, H., Rahimi, A.B. and Kianifar, A., "Axisymmetric stagnation-point flow and heat transfer of a viscous, compressible fluid on a cylinder with constant heat flux", *Scientia Iranica B*, Vol. 20, No. 1, pp. 185–194, (2013).
31. Rahimi, A.B., Mohammadiun, H. and Mohammadiun, M., "Axisymmetric stagnation flow and heat transfer of a compressible fluid impinging on a cylinder moving axially", *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 138, No. 2, pp. 022201-1-022201-9, (2016).
32. Mohammadiun, H., Mohammadiun, M., Hazbehian.M. and Maddah, H., "Experimental study of ethylene glycol‑based Al_2O_3 nanofluid turbulent heat transfer enhancement in the corrugated tube with twisted tapes", *Heat Mass Transfer*, Vol. 52, No. 1, pp. 141–151, (2016).
33. Freidoonimehr, N. and Rahimi, A.B, "Exact-solution of entropy generation for MHD nanofluid flow induced by a stretching/shrinking sheet with transpiration: Dual solution", *Advanced Powder Technology*, Vol. 28, No. 22, pp. 671-685, (2017).
34. Mansour, M.A., Mahdy, A.S., Ahmed, S.E. and Mohamed, S.S., "Entropy Analysis for Unsteady MHD Boundary Layer Flow and Heat Transfer of Casson Fluid over a Stretching Sheet", *Walailak J Sci & Tech*, Vol. 14, No. 2, pp. 169-187, (2017).
35. Corcione, M., "Empirical correlating equations for predicting the effective thermal conductivity and dynamic viscosity of nanofluids", *Ene. Convers. Manage*, Vol. 52, No. 1, pp. 789-793, (2011).